Comparaison de suites

Exercice 1: Classer par ordre de négligeabilité les suites de termes généraux suivants : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$, $\frac{1}{n\ln(n)}$

Exercice 2: Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(n + \ln(n))^2$
5. $u_n = \dfrac{\ln(n) + n}{n + \sqrt{n}}$
6. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}$

Exercice 3: Déterminer le comportement en $+\infty$ des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$
4. $u_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$

Exercice 4: *Composer des équivalents*

1. Soient (u_n) et (w_n) deux suites équivalentes.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les suites $(\mathbf{e}^{u_n})$ et $(\mathbf{e}^{w_n})$ soient équivalentes.
2. Soient (u_n) et (w_n) deux suites équivalentes, à termes strictement positifs, et de limite commune $\ell \neq 1$.
   Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(w_n)$.
3. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$.

Exercice 5: *Additionner des équivalents*
Soient (u_n), (w_n), (s_n) et (t_n) quatre suites de réels strictement positifs tels que $u_n \sim w_n$ et $s_n \sim t_n$.
Montrer que $u_n + s_n \sim w_n + t_n$.

Exercice 6: Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.
2. En déduire que $a^n = o(n!)$.

Comparaison de fonctions

Exercice 7: Soif $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{2x - 1}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$. On le note u.
2. Déterminer un équivalent simple de $f - u$ en $+\infty$.
3. En déduire que la courbe de f admet une asymptote affine en $+\infty$.

Exercice 8:
Déterminer les équivalents des fonctions suivantes au point souhaité :

1. $f : x \mapsto x + 1 + \ln(x)$ en $+\infty$.
2. $f : x \mapsto \cos(\sin(x))$ en 0.
3. $f : x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ en $+\infty$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$ en 0.

Exercice 9: [*] *Avec une astuce d'écriture*
Déterminer les équivalents des fonctions suivantes au point souhaité :

1. $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ en 0^+.
2. $f : x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0.

Exercice 10: Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que si $g(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(f(x))$ alors $\exp(g(x)) \underset{x \to +\infty}{=} o(\exp(f(x)))$.
2. Que pensez-vous de la réciproque ?
3. Comparer $f : x \mapsto (\ln(\ln(x)))^{x^{\ln(x)}}$ et $g : x \mapsto (\ln(x))^{x^{\ln(\ln(x))}}$ au voisinage de $+\infty$.

Applications des équivalents

Exercice 11:
Étudier la limite en 0 des fonctions :

1. $f : x \mapsto \dfrac{(1 - \cos(x))(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1 + \sin(x))}{\tan(6x)}$.
3. $h : x \mapsto x(3 + x)\dfrac{\sqrt{3 + x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.
4. $k : x \mapsto \left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x - \sin(x)}}$

Exercice 12: Étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$.

Exercice 13:
Montrer que $f : x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 14:
Étudier la dérivabilité des fonctions $f : x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ et $g : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.